

Un approccio minimo ai concetti di

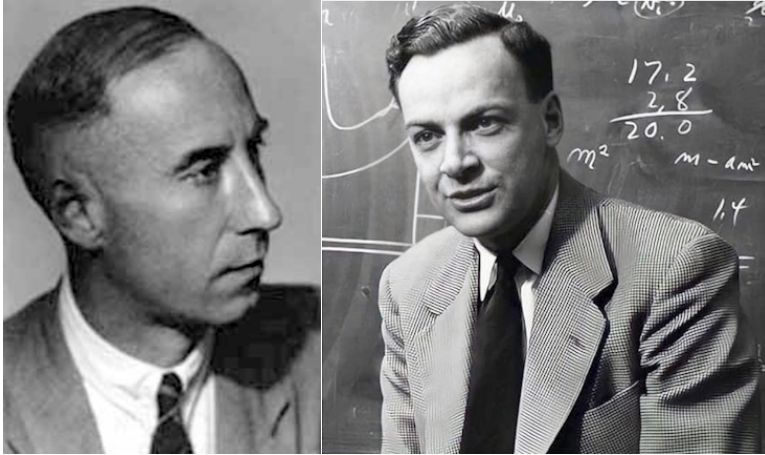
Materia e anti-Materia

con un'appendice sul Tensore Elettromagnetico

[livello intermedio]

claudio magno

Richard Phillips Feynman (1918-1988)



**Johann Melchior Ernst Karl
Gerlach Stüeckelberg (1905-1984)**

INDICE

INTRODUZIONE	P. III
• L'ENERGIA DI UNA PARTICELLA LIBERA	P. 1
• LA QUESTIONE DELL'INTERPRETAZIONE DELLO <i>SPAZIOTEMPO</i> EINSTEINIANO	P. 2
• L'INTERPRETAZIONE DI STÜCKELBERG-FEYNMAN	P. 3
• L'INTERPRETAZIONE DELL'INVERSIONE TEMPORALE	P. 3
APPENDICE	P. 5
LA RAPPRESENTAZIONE COVARIANTE DEL TENSORE EM (ELETTROMAGNETICO O DI MAXWELL)	
BIBLIOGRAFIA	P. 6

INTRODUZIONE

Questo notebook brevissimo ha più il carattere di un'*overview* estemporanea, un *excursus* semi-storico 'alla buona' su un tema fondamentale – quello del riconoscimento dell'esistenza dell'anti-Materia – che sta gettando un'ombra lunghissima fin dentro le problematiche astrofisiche correnti, i.e., in ultima analisi, della Cosmologia Gravitazionale e della nostra rappresentazione *quanto-relativistica* consolidata dell'Universo Fisico osservabile e misurabile.

I responsabili 'visionari' di questo passo concettuale fondamentale in avanti, ricco di ramificazioni e implicazioni di portata imprevedibile, sono stati **J. E. Stückelberg** – geniale (e sfortunato) fisico teorico e matematico del E. T. H. (Eidgenössische Technische Hochschule) di Zurigo – e il grandissimo **R. P. Feynman**, del Caltech, CA. Nonostante i due avessero lavorato in modo indipendente sul problema, Feynman riconobbe, poi, pubblicamente a Stückelberg, con l'onestà intellettuale che lo contraddistinse per tutta la vita, la priorità *temporale* di intuizione circa la 'strada giusta' da imboccare e, quindi, la legittimità *doverosa* di condivisione del Premio Nobel 1965 con Stückelberg. Purtroppo, la miopia ottusa del comitato organizzatore del Premio (unita a pressioni inevitabili (e scontate) ma estranee a ciò che *andrebbe inteso* per Scienza) trovò una 'foglia di fico' assai conveniente dietro alla figura diventata, già allora, quasi mitica di Feynman.

Quanto m'è venuto spontaneo di ricordare storicamente qui sopra attiene a qualsiasi *sistema sociale complesso*, affascinante e miserabile al tempo stesso, ingombrato da servi manutengoli reverenti e sciocchi, cortigiani nell'ombra e 'narcisi smaniosi' ma avara e arcigna verso personalità di vero spessore complessivo. E anche la scalpitante 'famigliola' dei fisici (o sedicenti tali) non fa eccezione: questo non è stato l'unico caso né, con ogni probabilità, sarà l'ultimo. Ai Los Alamos Labs ho visto e imparato tante cose ...

C M

Materia e anti-Materia

Il concetto di anti-Materia si è sviluppato autonomamente e in modo naturale nel momento in cui si è riusciti a unificare la Meccanica Quantistica e la Relatività Ristretta, alla fine degli anni '20. Le verifiche sperimentali arrivarono fin dai primi anni '30.

Oggi, in diagnostica medica, viene prodotta anti-Materia nella tomografia PET (POSITRON EMISSION TOMOGRAPHY), dove sono utilizzati *antielettroni*, più comunemente noti come *positroni*.

È particolarmente istruttivo seguire il percorso concettuale che, dalla Relatività Speciale Einsteiniana, ha portato a ipotizzare l'esistenza dell'anti-Materia su scala cosmico-gravitazionale, ripercorrendo i passaggi logici fondamentali su cui poggia il concetto di *antiparticella*, da cui emerge la combinazione tra Fisica Quantistica e Relatività Generale.

• L'Energia di una particella libera

In Meccanica Quantistica ordinaria, l'Energia di una *particella libera* avente *quantità-di-moto* (o *momento lineare*) p e Massa m si ricava introducendo la soluzione di *onda piana* (tale espressione quantistica caratterizza una particella 'non-soggetta a forze esterne') nell'*Equazione di Schrödinger* (3-dim). Il risultato, in regime *non-relativistico*, è

$$E = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{2m} \equiv \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2. \quad (1)$$

Invece, la Relatività di Einstein *impone* che tale espressione matematica per l'Energia sia solo la versione *approssimata* della più *fondamentale* seguente:

$$E = (\mathbf{p}^2 c^2 + (mc^2)^2)^{1/2}, \quad (2)$$

dove, c è la velocità del segnale EM nel Vuoto e $m = \gamma m_0$, con m_0 la *Massa-a-riposo* corrispondente.

Ora, si consideri l'approssimazione di quantità-di-moto p 'molto piccole' nel regime di *equivalenza* Energia-Massa, $E = mc^2$. Dalla Massa m di una particella *in moto relativistico*, espressa mediante *espansione binomiale*,

$$m \equiv m_0 \gamma = m_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16} \frac{v^6}{c^6} + \dots \right), \quad (3)$$

si determina l'espressione dell'Energia Totale di una particella libera, Energia ridotta alla sola parte *cinetica* K ,

$$\begin{aligned} E &\equiv K = m_0(\gamma - 1)c^2 = (m_0 \gamma - m_0)c^2 \\ &= \left(m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16} \frac{v^6}{c^6} + \dots \right) - m_0 \right) c^2 \equiv m_0 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16} \frac{v^6}{c^6} + \dots \right) c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2, \end{aligned} \quad (4)$$

i.e., il risultato *classico*, residuale dalla *cancellazione approssimante*, formalmente giustificata quando $v \ll c$.

La Fisica funziona così: quella che oggi sembra la forma definitiva di un'equazione, classica o quantistica, si ridurrà all'approssimazione di una versione più completa che *potrebbe* essere scoperta in futuro. Lo schema è sempre lo stesso: un'equazione del moto non-relativistica è, sostanzialmente, la versione approssimata della sua *estensione relativistica*, che, a tutt'oggi, è assunta come *la più fondamentale possibile* poiché rispetta il *Principio di Relatività* Einsteiniana.

Il problema nasce, qui, dal tentativo di rendere *relativistica* l'Equazione di Schrödinger. Infatti, il Principio di Relatività *ne cambia significativamente la struttura matematica*. Il calcolo dell'Energia Totale di una particella sia *libera* che *relativistica* con l'Equazione di Schrödinger portò all'esistenza di una *coppia* di soluzioni *relativistiche* formalmente corrette ma *ambigue* riguardo alla loro *interpretazione fisica*:

$$E = \pm (\mathbf{p}^2 c^2 + (mc^2)^2)^{1/2}. \quad (5)$$

Qui sta il problema: la struttura matematica della *rappresentazione relativistica* dell'Equazione di Schrödinger (1) ci pone davanti a un bivio: essa non dà, semplicemente, E , secondo l'Eq. (2), ma anche l'espressione opposta $-E$!

Per la prima volta in Fisica, l'equazione del moto di una particella libera ci impone che l'Energia possa avere un valore *sia negativo che positivo*. Dunque, perché non viene rigettata $-E$, se si ritiene *assurda* l'esistenza di particelle libere dotate di Energia (Totale) *negativa* nell'Universo Fisico della nostra esperienza *reale*?

Invece, stavolta scegliamo di spingere la matematica relativistica alle sue conseguenze estreme (uno di quei 'salti nel buio' che, talvolta, portano a progressi rivoluzionari in Fisica) e ipotizziamo l'esistenza una particella *libera* dotata di Energia Totale *negativa*. Quali ne risulterebbero le proprietà dinamiche?

L'Energia in Meccanica Quantistica descrive l'*evoluzione temporale* della dinamica di una particella *libera*. Il parametro

di evoluzione temporale è un fattore dato, nella cosiddetta ‘*rappresentazione di Schrödinger*’, da

$$e^{iEt} \equiv e^{i(p^2/(2m))t}, \quad (6.1)$$

una forma esponenziale di un certo numero complesso *unitario*, nel quale, l’esponente è espresso dal prodotto tra l’unità immaginaria, i , e, *più importante*, tra il valore dell’Energia, E , e quello della coordinata temporale, t . Se l’Energia di una particella libera è *negativa*, questo prodotto va modificato così da *conservare il carattere formale* (i.e., *matematico*) *intrinseco alla rappresentazione*. Quindi, se $E < 0$, il parametro esponenziale va riscritto come

$$e^{-iEt} \equiv e^{-i(p^2/(2m))t}. \quad (6.2)$$

Ora, è il caso di ricordare che, dalla non-accettabilità che una particella (libera) possa avere Energia Totale negativa, seguirebbero non pochi problemi circa la stabilità stessa della Materia. Infatti, l’Energia priva di un suo *limite inferiore* genererebbe un regime *catastrofico*: la Natura, *spontaneamente e senza eccezioni*, tenderebbe a *evolvere in micro-stati collettivi definitivamente stazionari* (in media), di *minore Energia possibile (condensazione)*.

Ma, allora, c’è un modo alternativo di interpretazione del prodotto $-iEt$, continuando a seguire ciò che la Relatività prescrive riguardo alla struttura spazio-temporale della Realtà Fisica?

- **La questione dell’interpretazione dello *SpazioTempo* Einsteiniano**

Rappresentiamo due *punti-evento*, $(t_1; \mathbf{r}_1)$ e $(t_2; \mathbf{r}_2)$, con due quaterne *distinte* di coordinate dello *SpazioTempo*, evidenziando la coordinata temporale, t , dalla terna di posizioni spaziali, $\mathbf{r} \equiv (x; y; z)$ associata:

$$\text{evento 1: } (t_1; \mathbf{r}_1) \equiv (t_1; x_1; y_1; z_1), \quad (7.1)$$

$$\text{evento 2: } (t_2; \mathbf{r}_2) \equiv (t_2; x_2; y_2; z_2), \quad (7.2)$$

Ipotizziamo che, *per noi*, l’evento 1 sia avvenuto *prima* dell’evento 2. Allora, matematicamente, si scrive

$$t_2 - t_1 > 0 \quad (7.3)$$

Un altro osservatore, in moto con velocità *relativa* $v \hat{\mathbf{x}}$ costante (i.e., di verso $\hat{\mathbf{x}}$ e di componente scalare $v \geq 0$ *invarianti nel Tempo*) vs. il *nostro* sistema di coordinate, osserva gli *stessi* eventi registrandoli con le *sue proprie* coordinate, contraddistinte da *apici*,

$$\text{evento 1: } (t'_1; \mathbf{r}'_1) \equiv (t'_1; x'_1; y'_1; z'_1), \quad (8.1)$$

$$\text{evento 2: } (t'_2; \mathbf{r}'_2) \equiv (t'_2; x'_2; y'_2; z'_2), \quad (8.2)$$

Tali eventi corrispondono alle trasformazioni Lorentz-relativistiche *temporali* lungo l’asse *spaziale* X' ($\parallel X$),

$$t'_1 = \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right), \quad (9.1)$$

$$t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right). \quad (9.2)$$

Nelle Eq.i (9.1) e (9.2), $\gamma > 0$ è il *fattore di scala* già incontrato nell’Eq. (3), dipendente dal valore *istantaneo* osservato per v in $v \hat{\mathbf{x}}$. Si ricordi che la definizione di γ è:

$$\gamma := (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \quad (9.3)$$

Sottraendo membro-a-membro l’Eq. (9.1) dall’Eq. (9.2), si ottiene la differenza tra gli *istanti* dei due eventi rilevati dall’osservatore in moto vs. il nostro sistema di coordinate:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right) - \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right) = \gamma \left(t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \right). \quad (10)$$

A questo punto, la matematica della Relatività costringe a porsi la domanda: che cosa accadrebbe se l’*osservatore in moto relativistico* registrasse che $t'_2 - t'_1 < 0$? o, detto altrimenti con l’Eq. (10), se *noi* osservassimo che

$$t_2 - t_1 < \frac{v}{c} (x_2 - x_1), \quad (11.1)$$

i.e. (dando per scontato che, *per noi*, la *freccia del Tempo* punta verso il Futuro ($\Rightarrow t_2 > t_1$)), se osservassimo che

$$c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} < v ? \quad (11.2)$$

La condizione imposta dalla Teoria della Relatività, fissa, *in ogni caso*, che sia $|v| \leq c$. Dunque, da

$$c^2 \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} < |v| < c, \quad (11.3)$$

segue che

$$c(t_2 - t_1) < x_2 - x_1. \quad (11.4)$$

Il vincolo (11.4) dice che, nel *nostro* sistema di riferimento, la distanza spaziale $x_2 - x_1$ tra i due eventi *può* essere maggiore della distanza percorsa dalla radiazione EM nel Vuoto (i.e., fotoni di velocità c) nel tempo che intercorre tra i due eventi stessi e che, se gli eventi soddisfano questa particolare caratteristica, allora è possibile trovare un osservatore con una velocità v tale che $t'_2 < t'_1$, i.e., tale, *per l'osservatore in moto*, da *scambiare l'ordine di accadimento temporale degli eventi*! Questa *assurdità* (!) ammetterebbe la possibilità di esistenza dell'uovo prima di quella della gallina che lo depone, *contraddicendo il Principio di Causalità*.

Ma non c'è alcun problema! Infatti, *l'inversione temporale avviene solo per eventi che non possono essere connessi da alcuna relazione causale: non ci può essere trasporto di informazione tra eventi distanti, nello Spazio, più di quanto la luce percorra nell'intervallo di Tempo che li separa*, com'è implicito nella condizione (11.4).

Nella struttura matematica della Teoria della Relatività *Generale* (quindi, *anche* di quella *Ristretta*), è possibile che l'ordine temporale degli eventi appaia invertito *dal punto di vista di un osservatore in moto*.

Quindi? Cosa c'entrano nella Fisica gli eventi *privi di connessione causale*? L'intero impianto della Fisica non è forse basato sulla Causalità, pena questa insormontabile contraddizione ... meta-Fisica?

Qui interviene uno dei *principi fondanti* della Teoria Quantistica, sia *non-relativistica* che *relativistica*: il *Principio di Indeterminazione* di Heisenberg (K. W., 1901-1976). Una conseguenza di tale Principio è la *possibilità* che una particella si propaghi da un punto all'altro dello Spazio *anche quando questi due punti non sono correlati causalmente*. Se una particella viene emessa in un punto A ed assorbita in un punto B (e, per ipotesi, A e B *non sono* causalmente correlati), allora, un osservatore che si muove con velocità *scalare algebrica* v ($\equiv \pm \|v\|$), Eq. (11.2), vedrebbe l'assorbimento della particella in B a un istante che *precede* quello di emissione in A. Come si esce da questa contraddizione?

• L'interpretazione di Stückelberg-Feynman

Tornando al prodotto tra i valori dell'Energia e del Tempo riguardanti l'evoluzione *temporale* di una particella libera, si era concluso che, se l'Energia è negativa, Eq. (6.2), segue l'implicazione *formale equivalente*

$$Et \Rightarrow (-E)t \equiv -Et \equiv E(-t). \quad (12)$$

In altre parole, può essere cambiato il segno di t invece che quello di E : formalmente, nulla appare diverso, ma il risultato *interpretativo* è davvero **dirompente**:

Una particella libera di Energia *negativa* può essere pensata anche come una particella libera di Energia *positiva* che si muove con la freccia del Tempo che punta verso il Passato.

Questo fu il punto di partenza di Stückelberg e di Feynman, i quali, si posero subito il problema di come cancellare definitivamente il concetto di *Energia negativa*. D'altra parte, nel contesto delle interazioni tra particelle libere (quasi-) puntiformi, la Teoria della Relatività *non esclude l'inversione temporale*, come si è discusso sopra.

Ma che senso ha questa propagazione indietro nel Tempo? stiamo scivolando ancora nella meta-Fisica? Infatti, si deve ragionare sul significato – dal punto di vista *fisico* – dell'*inversione temporale*.

• L'interpretazione dell'inversione temporale

Generalmente classifichiamo le particelle in base al *modo in cui esse si comportano nelle interazioni fondamentali*. In particolare, ci interessa studiarne la traiettoria in una regione in cui è presente un Campo Elettromagnetico, EM.

L'*accoppiamento* tra una particella e un Campo EM avviene mediante una grandezza specifica, la *Carica Elettrica*, q . E, poiché le grandezze fisiche, di per sé, *non dipendono dalla loro rappresentazione matematica*, sia essa *quantistica* e/o *relativistica*, allora, è lecito riscrivere l'Equazione di Schrödinger (1) per la particella libera usando entrambe le rappresentazioni, con il Tempo assunto nella forma di *Tempo proprio* (*proper Time*), $t \Rightarrow \tau := t/\gamma$, un tecnicismo

relativistico – va ribadito – *ininfluente* sulle grandezze fisiche! Dunque, all'Eq. *quantistica* del moto (1) corrisponde la forma 4-tensoriale *relativistica*, e.g., quella *covariante*, della *forza di accoppiamento (elettromagnetico) interattivo*,

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}^\mu}{d\tau^2} = q \frac{d\mathbf{x}^\nu}{d\tau} \mathcal{E}_{\mu\nu}. \quad (13)$$

La forza elettromagnetica su una carica q modifica la traiettoria del suo *portatore massivo, accelerandolo*. Questo descrive traiettorie in una direzione e verso, in base al *segno* della carica q , che può essere *positivo* o *negativo*.

Tra tutti i simboli dell'equazione (13), concentriamoci solo sulla coordinata temporale (relativistica) τ . Ci sono solo due termini che contengono τ esplicitamente, ed entrambi sono denominatori, $d\tau^2$ e $d\tau$ (si ricordi, dall'Analisi, il simbolo sintetico $d\tau^2 \equiv (d\tau)(d\tau)$). Se avviene l'inversione temporale $d\tau \Rightarrow -d\tau$, il denominatore *a sinistra*, un quadrato, *non cambia*; cambia, invece, il denominatore *a destra*, quello contenente il *tensore elettromagnetico $\mathcal{E}_{\mu\nu}$* :

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}^\mu}{(-d\tau)(-d\tau)} \equiv m \frac{d^2 \mathbf{x}^\mu}{d\tau^2} = q \frac{d\mathbf{x}^\nu}{(-d\tau)} \mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv (-q) \frac{d\mathbf{x}^\nu}{d\tau} \mathcal{E}_{\mu\nu}. \quad (14)$$

Dunque, la freccia del Tempo continua a puntare verso il Futuro, mentre l'Eq. (14), ancora con $m = \gamma m_0$, è riferibile alla particella *equi-massiva* (dove, però, $\gamma \equiv \gamma(v(\tau))$ di carica elettrica *opposta*, l'*antiparticella* associata.

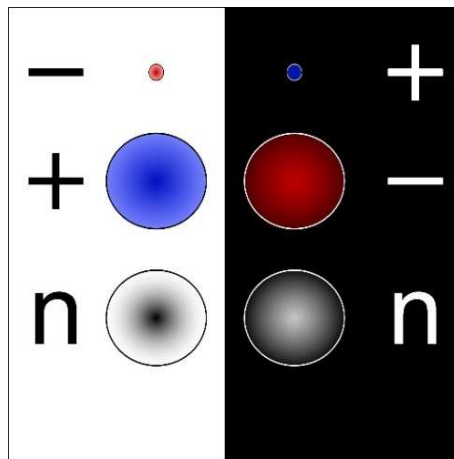
In sintesi, una particella di Energia *positiva* che appaia muoversi *indietro* nel Tempo è, *in realtà*, una particella di Energia *positiva*, con la *stessa* massa ma con *carica opposta*, che si muove *avanti* nel Tempo, i.e., verso il Futuro. Ne segue che, le particelle di Energia *negativa* sono interpretabili come particelle ad Energia *positiva* che si muovono *avanti* nel Tempo, anch'esse verso il Futuro, ma dotate di carica *opposta*. Detto altrimenti, una particella di Energia *negativa* è, semplicemente, un'*antiparticella* di Energia *positiva* che si muove, come ogni particella, *avanti* nel Tempo. differendo dalla *particella associata* solo per il segno della carica elettrica (e di altri *numeri quantici* ad essa connessi).

La scoperta *sperimentale* (1933) del *positrone* (Anderson, (C. D., 1905-1991)) aveva già posto le basi *sia* del quadro interpretativo teorico sia dell'ipotesi *più generale* dell'*esistenza dell'anti-Materia* (P. A. M. Dirac, 1931).

A completamento dell'intuizione del sempre *grandissimo* Feynman, è stato risolto anche il paradosso enunciato sopra:

si supponga di vedere una particella *emessa* in un punto A e *assorbita* in un punto B. Come dice la Relatività, un altro osservatore potrebbe, invece, vedere una particella *assorbita* in B in un istante che precede la sua *emissione* nel punto A (purché A e B *non siano correlati causalmente*). Ora, è evidente che ciò equivale a osservare una particella di carica *opposta* che viene *emessa* in B e *assorbita* in A.

Il Principio di Causalità – *intrinseco al Tempo!* – continua a valere nella Fisica che abbiamo scoperto e costruito nei millenni, cominciando dalle pratiche più semplici nella vita quotidiana. L'Universo Fisico che osserviamo, misuriamo e testiamo *sperimentalmente* miliardi di miliardi di miliardi di volte in ogni istante (più o meno direttamente e in modo incrociato), dalla pioggia che cade al funzionamento di un frullatore o di un microchip al collasso gravitazionale di una stella di neutroni, etc.), conferma ripetutamente, alla nostra *Conoscenza* e alle nostre azioni *conseguenti*, tutte fondate sull'*esperienza*, di essere una *struttura radiativo-materiale quanto-relativistica*. Per ora, ogni altra ipotesi resta a livello di congettura, magari rispettabile e suggestiva, ma in attesa di una falsificazione *sperimentale* definitiva e *inesorabile*. Altrimenti, si tratta solo di farneticazioni associabili a un 'summer sunstroke'.



Appendice

La rappresentazione covariante del Tensore EM (Elettromagnetico o di Maxwell)

A chi scrive, non pare inutile né banale sottolineare che la rappresentazione di modelli teorici *lineari* – purché consistenti con il controllo continuo e inesorabile di falsificazione sperimentale! – trovi ‘economico’ utilizzare metodi e strumenti matematici *lineari*. Ogni effetto fisico non-lineare viene, allora, declassato come *perturbativo* e approssimato mediante espansioni in serie arretrate al termine di *ordine superiore* sufficiente per una stima quantitativa coerente con il dato numerico fornito dall’apparato sperimentale. Gli strumenti rappresentativi sono le *matrici*, i.e., sia i vettori elementari a n -componenti che, più in generale, loro raggruppamenti, con gli elementi *ordinati* disposti in tabelle $m \times n$, righe \times colonne, con $\{m, n\} \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$.

Anche nella Fisica Classica (Elettrodinamica, Elasticità, Fluidodinamica, etc.), le matrici $m \times n$ sono in grado di sintetizzare in modo adeguato comportamenti ed effetti *lineari interattivi coesistenti*, spesso, di natura molto complicata.

La bibliografia per un apprendimento efficace delle manipolazioni algebrico-analitiche *tensoriali* delle matrici è riportata a p. 6. Qui di seguito, è presentata la rappresentazione *relativistica covariante* del Tensore EM, \mathcal{E}_{mn} , in forma matriciale *antisimmetrica* (*skew-symmetric*) esplicita 4×4 in \mathcal{C} , (i.e., $a_{mn} = -a_{nm}$, $\forall \{m, n\} \in \{1, 2, 3, 4\}$), nel SI di unità di misura:

$$\mathcal{E}_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -i\mathcal{E}_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -i\mathcal{E}_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -i\mathcal{E}_z/c \\ i\mathcal{E}_x/c & i\mathcal{E}_y/c & i\mathcal{E}_z/c & 0 \end{pmatrix},$$

una volta definito \mathbf{B} mediante il *potenziale-vettore* 3-dim \mathbf{A} , (i.e., $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) e le Trasformazioni di Lorentz delle Equazioni di Maxwell (J. C., 1831-1879). Tali trasformazioni – *lineari*! – sono ottenute definendo il *nuovo* potenziale-vettore 3-dim,

$$\mathbf{A}^\dagger := \mathbf{A} + \nabla \chi \equiv (A_x + \partial \chi / \partial x) \hat{x} + (A_y + \partial \chi / \partial y) \hat{y} + (A_z + \partial \chi / \partial z) \hat{z} \equiv A_x^\dagger \hat{x} + A_y^\dagger \hat{y} + A_z^\dagger \hat{z},$$

attraverso una *funzione di trasformazione* (di ‘*gauge*’) $\chi \equiv \chi(\mathbf{r}, t)$ *appropriata*, la cui derivata temporale, $\partial \chi / \partial t$, fornisca la definizione della funzione potenziale *scalare* trasformata $\phi^\dagger := \phi - \partial \chi / \partial t$. Anche ϕ , per garantire l’invarianza *formale* della trasformazione, deve soddisfare, come ϕ , l’Equazione di Laplace, $\nabla^2 \phi^\dagger = 0$. In altri termini, la *differenza* $\phi^\dagger - \phi \equiv$ *invariante spaziale* arbitraria e, quindi, χ è una funzione *costante*, i.e., dipendente dalla *sola posizione* \mathbf{r} (nello spazio 3-dim).

Ora, appare logico chiedersi il motivo dell’introduzione della matrice 4×4 rappresentativa di \mathcal{E}_{mn} . Nel suo ‘*A Treatise on Electricity and Magnetism*’, Maxwell, completando la formulazione della *Legge di Ampère* con la celebre ‘*corrente di spostamento*’,

$$I_d := \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{E} \cdot \hat{n} dr^2 \equiv -\epsilon_0 \mu_0 \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{A}^\dagger}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} dr^2.$$

generata dal *flusso* $\mathbf{J}_d(\mathbf{r})$ di *cariche libere* nel *campo elettrico* $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ attraverso la *superficie gaussiano-vettoriale* $d\mathbf{S} \equiv \hat{n} dr^2$,

$$\mathbf{J}_d := \sigma \mathcal{E} = \mu_0^{-1} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

(rappresentabile evidenziando o la *conduttività elettrica* σ del mezzo o la *permeabilità* μ_0 del Vuoto), aveva intuito chiaramente che la coordinata temporale t era essenziale nella rappresentazione unitaria dei fenomeni elettromagnetici mantenendo, però, i campi \mathcal{E} e \mathbf{B} separati e, sostanzialmente, *indipendenti tra loro*. Maxwell non poteva accorgersi che il suo quadro teorico era già *quantizzato* e *unificabile* attraverso \mathcal{E}_{mn} : Relatività e Fisica Quantistica erano ancora di là da venire!

Pertanto, oggi possiamo generalizzare, nel ‘*gauge*’ di Lorentz, con $c := (\epsilon_0, \mu_0)^{-1/2}$, relazioni valide per *qualsiasi* mezzo, purché *omogeneo, isotropo, lineare e continuo*, quali, e.g.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \equiv (A_x, A_y, A_z, i\phi/c) \Rightarrow (A_x^\dagger, A_y^\dagger, A_z^\dagger, i\phi^\dagger/c) \equiv \mathbf{A}^\dagger \\ \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \square^2 \phi^\dagger \equiv \square \cdot \square \phi^\dagger = 0 \\ \mathbf{B}^\dagger = \square \times \mathbf{A}^\dagger \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, \partial/\partial t) \times \mathbf{A}^\dagger \equiv \square \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \\ \square^2 \mathbf{A}^\dagger + \mu \mathbf{J}_d^\dagger = \mathbf{0} \equiv (0, 0, 0, 0) \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Sarebbe auspicabile (secondo chi scrive) che, visti i rapidi avanzamenti e consolidamenti in atto nella Fisica Moderna, le Equazioni di Maxwell venissero insegnate deducendole – *definitivamente* – da \mathcal{E}_{mn} e adattandole, poi, ai casi specifici nelle forme *ridotte* opportune. La chiamo: *consapevolezza sia formativa sia culturale* verso il Futuro.

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [7], ne indica la versione PDF *contenuta* in un 7z-Archivio e scaricabile gratuitamente dalla pagina Biblioteca di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html.

Ben lontano dal ritenere questo elenco bibliografico esaustivo o fondamentale, lo propongo – a chi legge per iniziare a *praticare consapevolmente* – come un riferimento regolare possibile agli spazi *lineari* 3.dim e 4-dim e alle loro *rappresentazioni matriciali* rispettive. Ho trovato questi 'tools' *molto* utili. Sono contenuti nelle cartelle interne al 7z-Archivio 14.

- [1] Lang, S., *Linear Algebra*, 3rd ed., Springer (2004 corr. prin.);
- [2] Lipschutz, S. - Lipson, M. L., *Linear Algebra*, 4th ed. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill (2009);
- [3] Spiegel, M. R. - Lipschutz, S. - Spellman, D., *Vector Analysis*, 2nd ed., Schaum's Outline Series, McGraw-Hill (2009);
- [4] Ayres, F., Jr., *Theory and Problems of MATRICES*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc. (1962);
- [5] Bronson, R., *Theory and Problems of MATRIX OPERATIONS*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc. (1989);
- [6] Lass, H., *Vector and Tensor Analysis*, McGraw-Hill Book Co. (1950);
- [7] Spain, B., *TENSOR CALCULUS - A Concise Course*, 3rd ed., Oliver & Boyd Ltd. (1960; 2003 Dover repr.);
- [8] Borisenko, A. I., - Tarapov, I. E., *Vector and Tensor Analysis with Applications*, Prentice-Hall, Inc. (1968);
- [9] Sochi, T., *TENSOR CALCULUS*, a 2-PDF folder, arXiv:1603.01660v3 (2016);
- [10] Kay, D. C., *Theory and Problems of TENSOR CALCULUS*, Schaum's Outline Series, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co. (1988).

■■■